

AZ MS EXCEL TÁBLÁZATKEZELŐ ALKALMAZÁSA MAXIMÁLIS FOLYAMPROBLÉMÁK MEGOLDÁSÁNÁL

GUBO, Štefan, SK

Absztrakt: A gráfelméletben a maximális folyamproblémák a hálózati gráfoknál szerepelnek, mely gráfokban minden él rendelkezik kapacitással. A probléma megtalálni azt a maximális folyamot a gráf egy adott forráspontjából (s) egy adott nyelőpontjába (t), miközben teljesülni kell az alábbi feltételeknek: a) egyik élen sem lehet nagyobb a folyamérték, mint az adott él kapacitása, b) az s és t pontok kivételével minden pontra érvényes, hogy a befolyó folyamértékek összege egyenlő a kifolyó folyamértékek összegével. A cikkben bemutatjuk, miként lehet alkalmazni az MS Excel 2013 táblázatkezelőt ilyen problémák megoldásánál.

Kulcsszavak: hálózati folyamok, maximális folyamprobléma, MS Excel, Solver

USING MS EXCEL SPREADSHEET APPLICATION IN SOLVING MAXIMUM FLOW PROBLEMS

Abstract: In graph theory, the maximum flow problem is structured on a graph which represents a flow network where every edge has a capacity. The problem is to find the maximum flow possible from a given source vertex (s) to a given sink vertex (t) with following constraints: a) flow on an edge doesn't exceed the given capacity of the edge, b) incoming flow is equal to outgoing flow for every vertex except s and t . In this paper we illustrate how to use the MS Excel 2013 spreadsheet application in solving such type of problems.

Key words: flow network, maximum flow problem, MS Excel, Solver

1 Bevezetés

A gráfelméletben az optimalizálási feladatok speciális csoportját képezik a hálózati folyamproblémák. A folyam elnevezés, amelyet használni fogunk, tulajdonképpen valaminek az áramlásával kapcsolatos (pl. folyadék, elektromos áram, közlekedési járművek, adat). A gráfelmélet ezen területének fejlődése a II. világháború idején vett nagy lendületet, amikor is az eredményes hadviselés megkívánta a hadsereg egységeinek gyors átcsoportosítását. Ehhez olyan optimális szállítási tervet kellett készíteni, amely az egyes útszakaszok pontos igénybevételét tartalmazta, figyelembe véve azok áteresztőképességét. Gráfelméleti fogalmakat használva ilyenkor egy hálózati gráfban maximális folyamot keresünk. A cikkben az MS Excel 2013 táblázatkezelő alkalmazás felhasználását mutatjuk be egy maximális folyamprobléma megoldásánál.

2 Hálózati folyamok

1. definíció [3]: Legyen $G(V, E)$ egy összefüggő súlyozott irányított gráf, amelynek van forráspontja (s) és nyelőpontja (t). A gráf minden éle rendelkezik c súlyértékkel, melyet **kapacitás**nak nevezünk, és feltételezzük, hogy ezek nemnegatív valós számok, $c: E \rightarrow R_0^+$. A (G, s, t, c) négyest **hálózati gráfnak** nevezzük.

Minden hálózati gráf esetén beszélhetünk a rajta átfolyó hálózati folyamról. Ez úgy képzelhető el, mintha a hálózati gráf egy vezetékrendszer lenne, amelyen átfolyik egy bizonyos mennyiségű folyadék. A kapacitásértékek a csövek áteresztőképességét jelölik. A folyadék a forráspontból indul ki, és a nyelőpontba érkezik. A hálózat gráfon átfolyó

folyamot megadni annyit jelent, mint megmondani, hogy a gráf minden egyes élén mekkora lesz az átfolyó folyadékmennyiség.

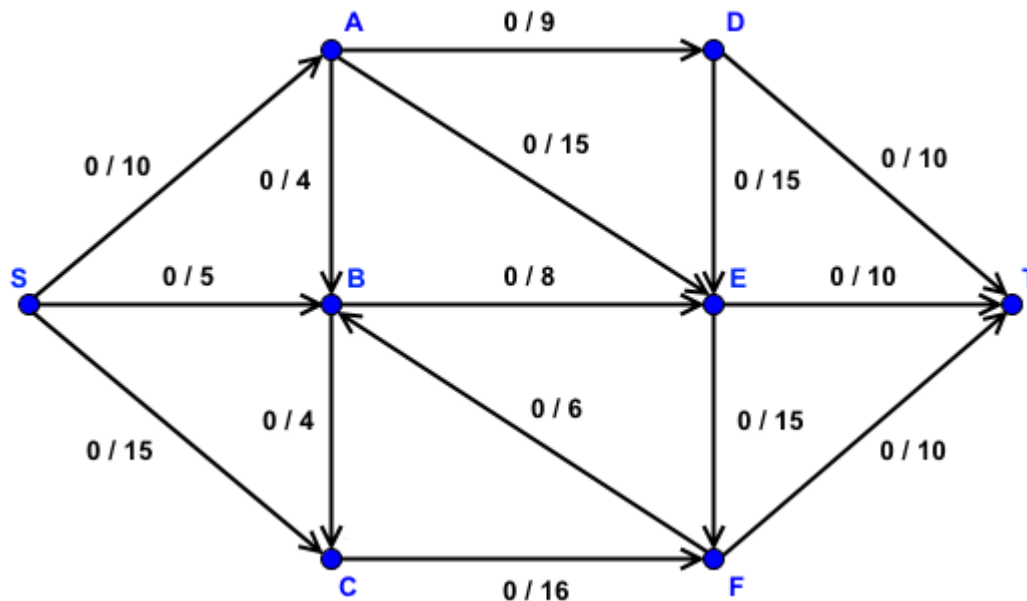
2. definíció [3]: Az $f: E \rightarrow R^+$ függvényt a (G, s, t, c) hálózati gráfon **átfolyó folyam**nak nevezzük, ha egyidejűleg teljesül az alábbi két feltétel:

- **minden** $(u, v) \in E$ **él** esetén $f((u, v)) \leq c((u, v))$, azaz egyetlen élen sem lehet nagyobb a folyamérték, mint az adott él kapacitása,
- **minden** $u \in V \setminus \{s, t\}$ **csúcspont** esetén a csúcspontba befolyó folyamértékek összege egyenlő a csúcspontból kifolyó folyamértékek összegével.

A hálózati gráfon átfolyó folyamérték egyenlő a forráspontra élein kifolyó folyamértékek összegével. Ez az érték természetesen egyenlő a nyelőpontra élein befolyó folyamértékek összegével. Ami minket érdekel, az egy adott hálózati gráfon átfolyható maximális folyamérték. A (G, s, t, c) hálózati gráfon átfolyó folyam **maximális**, ha folyamértéke nagyobb a hálózati gráfon továbbítható összes lehetséges folyam folyamértékénél. A maximális folyam megkeresésére több eljárás is létezik, megemlíjük a Ford-Fulkerson algoritmust (lásd [1], [2], [3]), az Edmonds-Karp algoritmust (lásd [1]) és Dinic algoritmusát (lásd [2]).

3 Maximális folyamprobléma megoldása MS Excel táblázatkezelőben

Feladat: Határozzuk meg az 1. ábrán látható hálózati gráfon átfolyó maximális folyamot!



1. ábra: A feladat hálózati gráfja

A feladatot lineáris optimalizálási feladatként fogjuk megoldani, melynek modellje három részt tartalmaz: **célfüggvényt**, **változó cellákat** és **korlátozó feltételeket**.

Célunk meghatározni a hálózati gráf minden egyes élén az átfolyó folyadékmennyiséget. Mivel a feladatban szereplő hálózati gráf 15 darab élt tartalmaz, ezért a matematikai modellben 15 változóra lesz szükségünk (C4:C18 cellatartomány). Ezek lesznek a **változó cellák**, kiindulási helyzetben minden cella értéke 0 lesz (lásd 2. ábra).

A forráspontra (S) és a nyelőpontra (T) kivételével minden csúcspontra teljesülnie kell a folyadék megmaradási törvénynek, azaz a csúcspontba befolyó folyamértékek összegének egyenlőnek kell lennie a csúcspontból kifolyó folyamértékek összegével. Ezt a 2. ábra jobb

oldalán szereplő táblázat segítségével fogjuk bebiztosítani. A BE oszlopba fognak kerülni az adott csúcspontba az egyes éleken befolyó folyamértékek összegei, míg a KI oszlopban az adott csúcspontból az egyes éleken kifolyó folyamértékek összegeit fogjuk tárolni. Ezeket az összegeket a legegyszerűbben úgy határozhatjuk meg, ha magunk alkotjuk meg a megfelelő képleteket a szerkesztősorban (pl. $I4 := C4$, hiszen az A csúcspontba csak egy élen keresztül folyik be folyadék; vagy $I5 := C5+C7+C17$, hiszen a B csúcspontba három él fut be).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Maximális folyamprobléma									
2										
3	Csúcsból	Csúcsba	Folyam		Kapacitás			Csúcs	BE	KI
4	S	A	0	≤	10			A	0	0
5	S	B	0	≤	5			B	0	0
6	S	C	0	≤	15			C	0	0
7	A	B	0	≤	4			D	0	0
8	A	D	0	≤	9			E	0	0
9	A	E	0	≤	15			F	0	0
10	B	C	0	≤	4					
11	B	E	0	≤	8					
12	C	F	0	≤	16					
13	D	E	0	≤	15					
14	D	T	0	≤	10					
15	E	F	0	≤	15					
16	E	T	0	≤	10					
17	F	B	0	≤	6					
18	F	T	0	≤	10					
19										
20	MAX folyam:		0							
21										

2. ábra: A maximális folyamfeladat megoldása MS Excelben

Kicsit bonyolultabb, de sokkal hatékonyabb a SZUMHA függvény használatával történő összegmeghatározás. Ez a függvény lehetővé teszi, hogy egy tartományban összeadjuk azokat az értékeket, amelyek megfelelnek bizonyos feltételeknek.

Az **I4** cellába adjuk meg a $=SUMIF(\$B\$4:\$B\$18;H4;\$C\$4:\$C\$18)$ képletet, amely a **B4:B18** cellatartományban megkeresi azokat a cellákat, melyeknek tartalma A (ez a H4 cella tartalma), majd a **C4:C18** cellatartományban megkeresi a találatoknak megfelelő sorazonosítójú cellákat, s eredményként ezek összegét adja vissza. Így tulajdonképpen az A csúcspontba befolyó folyamértékek összegét kapjuk meg. Figyeljük meg a képletben szereplő cellatartományok szintaxisát: a sor- és oszlopazonosító elé behelyezett \$ jelek azt fogják eredményezni, hogy a képlet másolásakor ezek az azonosítók nem fognak változni. Vagyis, ha ezt a képletet lefelé fogjuk másolni, akkor a B, C, D, E és F csúcspontokra fogjuk megkapni a befolyó folyamösszeget. A képlet másolásához elegendő kattintani az **I4** cellára állított cellakurzor jobb alsó sarkában lévő kis fekete négyzetre, majd lehúzni az **I9** celláig.

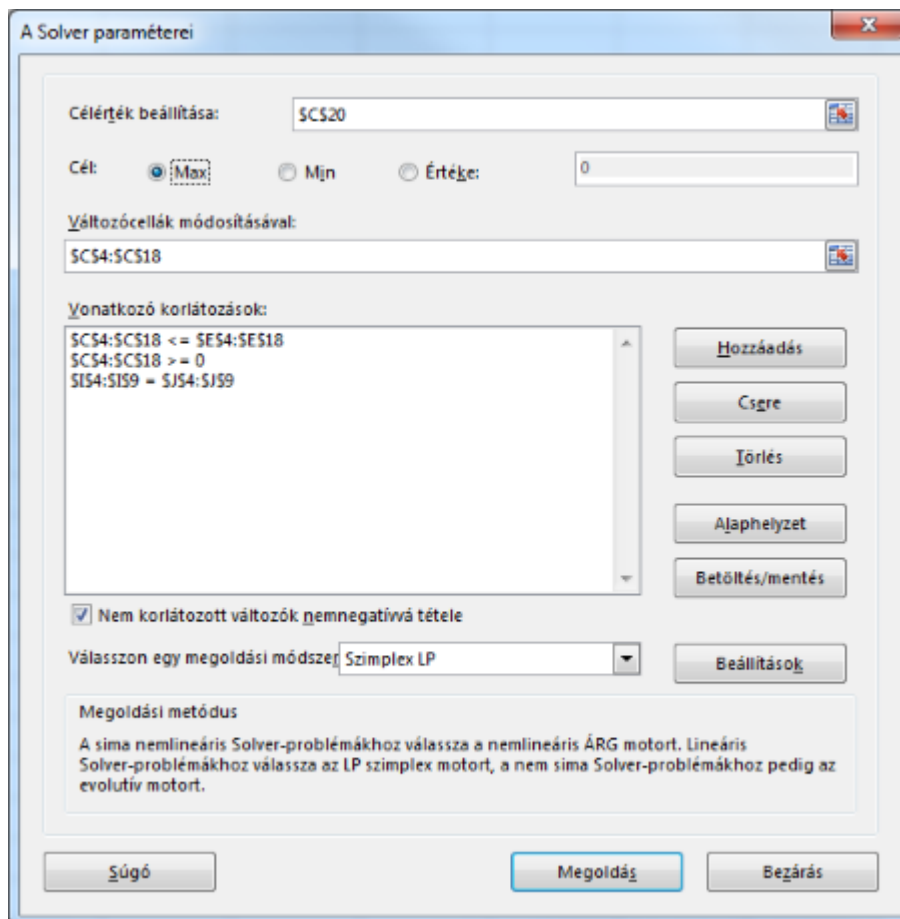
A kifolyó folyamösszegek meghatározása hasonló módon történik. A **J4** cellába adjuk meg a $=SUMIF(\$A\$4:\$A\$18;H4;\$C\$4:\$C\$18)$ képletet, amely most az **A4:A18** cellatartományban fogja megkeresni azokat a cellákat, melyeknek tartalma A (ez a H4 cella tartalma), majd a **C4:C18** cellatartományban megkeresi a találatoknak megfelelő sorazonosítójú cellákat, s eredményként ezek összegét adja vissza. Így tulajdonképpen az A

csúcspontból kifolyó folyamértékek összegét fogjuk megkapni. Ezt a képletet, másoljuk lefelé egészen a **J9** celláig.

Ha ezzel készen vagyunk, akkor már felírhatjuk a lineáris optimalizálási feladat **korlátozó feltételeit**:

- 1) **C4:C18** ≤ **E4:E18** (egyik élen sem folyhat nagyobb mennyiségű folyadék, mint annak kapacitása),
- 2) **C4:C18** ≥ 0 (egyik élen sem folyhat negatív mennyiségű folyadék),
- 3) **I4:I9** = **J4:J9** (a folyadékmennyiség megmaradásának szabálya az A, B, C, D, E és F csúcspontokra).

Mivel a hálózati gráfon átfolyó folyamérték egyenlő a forráspon (S) három élen kifolyó folyamértékek összegével, a **C20** célkitűzőcellába megadjuk a **célfüggvény** képletét a következőképpen: **C20** := **C4+C5+C6**. A lineáris optimalizálási feladatban ezt a függvényt fogjuk maximalizálni.



3. ábra: A Solver bővítmény párbeszédablaka

A feladat megoldására az MS Excel beépített Solver bővítményét fogjuk használni, amely lehetőséget ad arra, hogy megkeressük egy adott cellába (célkitűzőcella) írt képlet optimális (MAX, MIN) értékét, figyelembe véve más cellákba írt korlátozó feltételeket. A Solver úgy módosítja a változócellák értékeit, hogy megfeleljenek a korlátozócellákba írt megkötéseknek, majd a célkitűzőcellába az optimális eredményt írja be. A bővítmény az *Adatok* lap *Elemzés* csoportjában található. Amennyiben a lapon nem lenne ilyen nevű

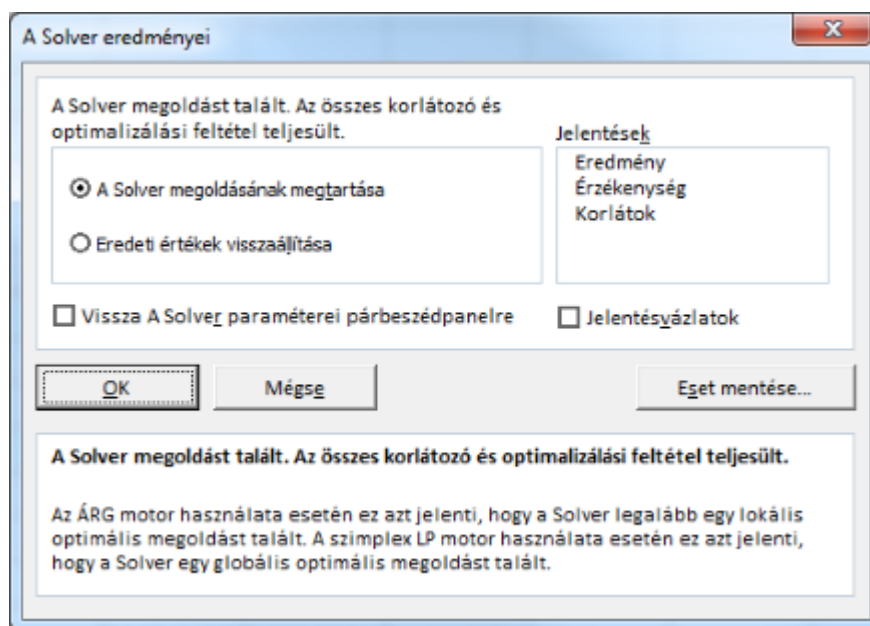
csoporthoz, vagy a csoportban nem található a Solver parancs, akkor a bővítményt be kell telepíteni. A maximális folyamfeladat optimális megoldásának megkereséséhez indítsuk el a Solver bővítményt. A 3. ábrán látható párbeszédablak jelenik meg.

A **Célérték beállítása** mezőbe adjuk meg a célkitűzőcellára vonatkozó cellahivatkozást (jelen esetben a **C20** cella). Mivel azt szeretnénk, hogy a célkitűzőcella a lehető legnagyobb értéket vegye fel, ezért válasszuk ki a **Max** rádiógombot.

A **Változócellák módosításával** mezőben adjuk meg a változócellákra vonatkozó cellahivatkozásokat (jelen esetben a **C4:C18** cellatartomány). A nem szomszédos cellák hivatkozásait vesszővel kell elválasztani.

A **Vonatkozó korlátozások** mezőbe kell megadnunk a lineáris optimalizálási feladat korlátozó feltételeit. Az egyes feltételeket a Hozzáadás nyomógombra való kattintással vihetjük be.

Ha mindezzel megvagyunk, akkor válasszuk ki a Szimplex LP megoldási módszert, majd kattintsunk a **Megoldás** nyomógombra. Egy újabb párbeszédablak (4. ábra) jelenik meg, azzal az üzenettel, hogy a Solver bővítmény talált optimális megoldást. Amennyiben szeretnénk a megoldás értékeit a munkalapot megjeleníteni, válasszuk ki a **A Solver megoldásának megtartása** rádiógombot, majd kattintsunk az OK gombra.



4. ábra: A Solver eredményei párbeszédablak

A **C4:C18** változócellákban megjelennek a Solver által meghatározott optimális értékek, melyek úgy adják meg a hálózati gráf egyes élein átfolyó folyadékmennyiséget, hogy a gráfon árfolyó folyam értéke maximális legyen. A **C20** célkitűzőcellában pedig megjelenik a maximális folyam értéke (5. ábra).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Maximális folyamprobléma									
2										
3	Csúcsból	Csúcsba	Folyam		Kapacitás			Csúcs	BE	KI
4	S	A	10	≤	10			A	10	10
5	S	B	5	≤	5			B	8	8
6	S	C	13	≤	15			C	13	13
7	A	B	0	≤	4			D	8	8
8	A	D	8	≤	9			E	10	10
9	A	E	2	≤	15			F	13	13
10	B	C	0	≤	4					
11	B	E	8	≤	8					
12	C	F	13	≤	16					
13	D	E	0	≤	15					
14	D	T	8	≤	10					
15	E	F	0	≤	15					
16	E	T	10	≤	10					
17	F	B	3	≤	6					
18	F	T	10	≤	10					
19										
20	MAX folyam:		28							
21										

5. ábra: A maximális folyamfeladat megoldása

Befejezés

A cikkben közölt maximális folyamfeladat megoldása alapján elmondható, hogy az MS Excel táblázatkezelő program kiválóan alkalmazható az ilyen típusú feladatok megoldásánál. A felhasználónak elegendő az ismertetett megoldási módszert elsajátítania, s gráfelméleti algoritmusok alkalmazása nélkül is képessé válik a maximális folyam megkeresésére hálózati gráfban.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetemet fejezem ki a Szlovák Köztársaság Iskolaügyi, Tudományos, Kutatási és Sportminisztériumának a KEGA 010UJS-4/2014 projekt keretén belüli támogatásáért.

Irodalom

- [1] CORMEN, T. H. – LEISERSON, Ch. E. – RIVEST, R. L., *Algoritmusok*. Műszaki Könyvkiadó, 1997. ISBN 963-1613-89-5.
- [2] EVEN, S., *Graph Algorithms*. Cambridge University Press, 2012. ISBN 0-521-51718-8.
- [3] KÁTAI, Z., *Gráfelméleti algoritmusok*. Scienia Kiadó, 2008. ISBN 973-7953-95-7.
- [4] RAGSDALE, C. T., *Spreadsheet Modeling & Decision Analysis*. South-Western Cengage Learning, 2012. ISBN 0-538-74632-8.

Lectured by: doc. RNDr. Ferdinánd Filip, Ph.D.

Contact address:

Štefan Gubo, RNDr. Ph.D.,
 Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Economics, J. Selye University, SK-94501
 Komárno, Bratislavská cesta 3322, Slovakia,
 phone: +421-35-3260-771 , e-mail: gubos@uj.sk