GEOGEBRA A NIEKOĽKO EKONOMICKÝCH APLIKÁCIÍ KRIVKY UČENIA SA

DRÁBEKOVÁ, Janka – ČERYOVÁ, Dominika, SR

Resumé: Kreativita je schopnosť riešiť problémy novým, neobvyklým spôsobom. Interdisciplinárny charakter matematiky ponúka množstvo príležitostí na rozvoj kreatívneho myslenia študentov. V príspevku sa zaoberáme riešením vybraných ekonomických problémov pomocou softvéru GeoGebra a exponenciálneho modelu – krivky učenia sa. Interdisciplinárny charakter úloh zvýrazní bezprostrednú väzbu matematiky a ekonómie. Úzke spojenie znázornenia objektov s aspektom reprezentácie a opis daného ekonomického javu dosiahneme pomocou grafickej interpretácie riešenia úloh.

Kľúčové slová: matematika, ekonomické aplikácie, GeoGebra, krivka učenia sa

GEOGEBRA AND SEVERAL ECONOMIC APPLICATIONS OF LEARNING CURVE

Abstract: Creativity is the ability to solve problems with new, unusual way. The interdisciplinary character of mathematics offers many opportunities for the development of creative thinking of students. The paper deals with the solution of selected economic problems using GeoGebra and exponential model – the learning curve. The interdisciplinary character of tasks, underlines the direct relation between mathematics and economics. Close links aspects of the illustration of the object with aspect of the representation and the description of economic phenomenon will achieve through graphical interpretation of the tasks.

Key words: mathematics, economic applications, GeoGebra, learning curve

1 Úvod

Kreativita je schopnosť hľadať nové myšlienky, spájať veci, ktoré na prvý pohľad spolu nesúvisia, riešiť problémy novým, neobvyklým spôsobom. Myslíme si, tak ako aj Rumanová a kol. [7], že matematické vzdelávanie by malo byť vnímané ako jedna z príležitostí pre rozvoj kreativity. Podľa Švecovej a Rumanovej [6] môže učiteľ podporiť kreatívne myslenie študentov tým, že pripraví tvorivé situácie, podporí iniciatívu žiakov a dá priestor im novým a originálnym nápadom. Podpora kreatívneho a logického myslenia študentov, by mala byť jedným z hlavných cieľov vzdelávania. Jednou z možností ako tento cieľ dosiahnuť, je využiť interdisciplinárny charakter matematiky a tvoriť resp. riešiť so študentmi aplikačné úlohy.

V posledných rokoch sa neustále zdôrazňuje nutnosť aplikácie matematických vedomostí a zručností pri riešení problémov reálneho života. Pretože jedným z dlhodobo pretrvávajúcich problémov vo výučbe matematiky na rôznych úrovniach škôl je jej nedostatočné prepojenie s inými vednými odbormi. Zakomponovanie aplikačných matematických problémov do vzdelávacieho procesu, umožňuje hľadanie nových prístupov k vzdelávaniu či k pochopeniu problematiky a ukazuje študentom zaujímavejšiu formu matematiky. Aplikačné úlohy rozvíjajú u študentov samostatnosť, aktivitu a tvorivosť [5].

Vniesť do matematického vzdelávania lepšiu názornosť a dynamiku môžeme pomocou prostriedkov informačných technológií. Vplyv implementácie nástrojov informačných technológií (IT) vnímame prostredníctvom zmien vo vyučovaní matematiky, ktoré odrážajú aj nové nároky na matematické kompetencie na všetkých stupňoch vzdelávania [4]. V súčasnosti máme k dispozícii množstvo prostriedkov IT, pomocou ktorých môžeme meniť základné princípy vzdelávania a stratégie učenia matematiky. Matematické softvéry nám ponúkajú rôzne pohľady aj na aplikované problémy a umožňujú použitie nových prístupov k ich tvorbe či riešeniu. Vizualizácia totiž uľahčuje predstavu daného myšlienkového procesu či javu a tým bezprostredne skracuje samotný proces učenia sa. My sme na vizualizáciu riešení aplikačných úloh využili softvér GeoGebra. Hoci sa na prvý pohľad zdá, že GeoGebra je softvér dynamickej geometrie, nájdeme v ňom aj širokú paletu aplikácií v matematickej analýze. Ide o voľne šíriteľný softvér (www.geogebra.org), ktorý v sebe spája geometriu, algebru a matematickú analýzu. Jednou z výhod softvéru GeoGebra, ktorá najviac didakticky zabezpečuje dostatočné objasnenie základných matematických pojmov a umožňuje ich plné porozumenie, je dvojaká reprezentácia všetkých objektov: geometricko-syntetická a algebraicko-analytická [8].

2 Krivka učenia sa

Známy nemecký psychológ a filozof Hermann Ebbinghaus skúmal pamäť a výsledkom jeho výskumov boli krivky vyjadrujúce zmenu množstva naučenej látky v čase – krivka učenia sa a krivka zabúdania. My sme sa v článku zamerali na krivku učenia sa a na jej využitie v ekonómii. Z matematického hľadiska patrí krivka učenia sa medzi exponenciálne modely. Ak predpokladáme, že rýchlosť, ktorou sa v čase t učíme, je priamo úmerná rozdielu všetkých poznatkov, ktoré sme schopní zapamätať si a množstva poznatkov, ktoré v čase t máme, môžeme písať [2]:

$$\frac{dQ}{dt} = k(B - Q), Q(0) = Q_0$$

$Q(t)$ - množstvo poznatkov, ktoré máme v čase t

$Q(0) = Q_0$ - množstvo poznatkov, ktoré máme na začiatku, teda v čase $t = 0$

B - je množstvo všetkých poznatkov, ktoré sme schopní si zapamätať

Riešením takejto diferenciálnej rovnice so začiatočnou podmienkou pomocou separácie premenných dostaneme rovnicu krivky učenia sa:

$$Q(t) = B - A \cdot e^{-kt}, A = B - Q_0$$

Ak $Q(0) = 0$, tak môžeme písať:

$$Q(t) = A\left(1 - e^{-kt}\right), A, k > 0$$

Krivka učenia sa má význam pre znázornenie dlhodobých činností, pretože pri opakovanom vykonávaní určitej aktivity človekom, dochádza k zníženiu času potrebného na jej realizáciu. Túto exponenciálnu funkciu môžeme využívať pri skúmaní vplyvu dĺžky školenia resp. praxe na výkonnosť zamestnancov, čiže pri plánovaní pracovnej sily na základe budúcich požiadaviek, pri skúmaní vplyvu doby reklamovania na uvedenie nového produktu do pozorností ľudí, pri stanovení ceny na základe odhadu budúcich nákladov a mnoho ďalších aplikovaných problémov. V praxi, napr. pri skúmaní výkonnosti pracovníkov, by sa však nemala aplikovať izolovane, lebo výsledok závisí od skúmaných jedincov. Výsledné znázornenie výsledkov bude pripomínať exponenciálny graf krivky učenia sa iba v prípade pozitívneho prístupu skúmaných jedincov.

3 Vybrané ekonomické aplikácie riešené pomocou softvéru GeoGebra

V tejto časti uvedieme niekoľko príkladov, pri riešení ktorých sme využili softvér GeoGebra. Ide o ekonomické aplikácie exponenciálneho modelu „krivky učenia sa", ktoré nám umožnia spojiť matematickú analýzu a ekonómiu. Pri tvorbe úloh sme sa inšpirovali literatúrou od autorov Barnet et al. [1], Grinčová [2], Molnárová [3].

Príklad1

Podľa štúdie efektívnosti práce vo výrobnej firme platí pre priemerného nového robotníka nasledujúci odhad výkonnosti:

počet mesiacov praxe	0	5
hodinová výkonnosť	350	480

Výkonnosť v závislosti podľa počtu mesiacov praxe sa riadi funkciou: $Q(t) = 600 - A \cdot e^{-kt}$. Nájdime neznáme koeficienty funkcie $Q(t)$ a znázornime graf danej funkcie. Pomocou softvéru GeoGebra zistime aká bude výkonnosť nového pracovníka po 8 mesiacoch, ak hodinová výkonnosť pracovníka bez praxe bude nulová a výkonnosť sa bude riadiť tou istou krivkou učenia sa.

Riešenie:

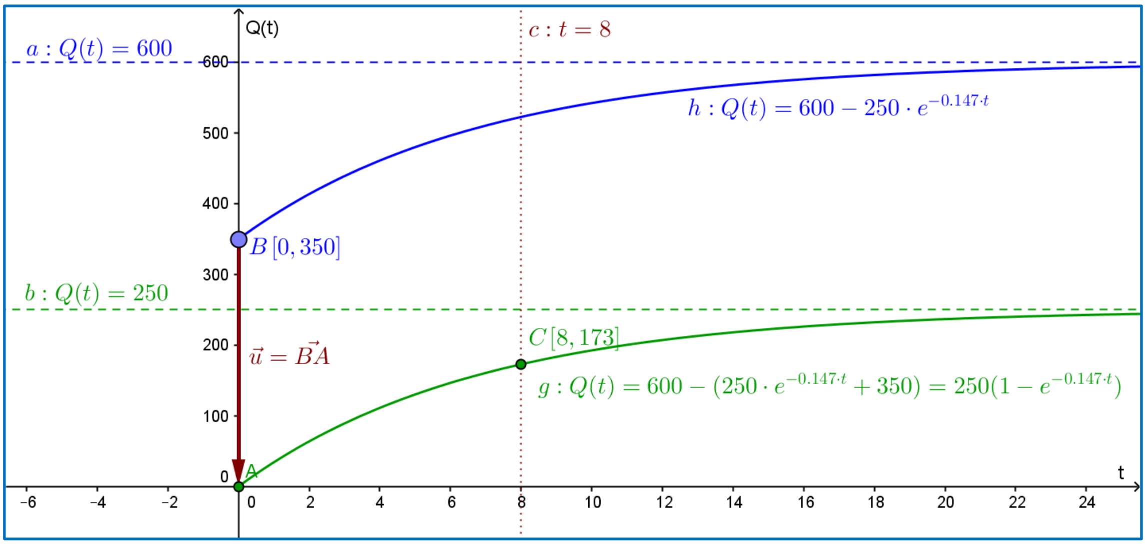
$$Q(0) = 600 - A \cdot e^{-k \cdot 0} \Rightarrow 350 = 600 - A \cdot 1 \Rightarrow A = 250$$

$$Q(5) = 600 - 250 \cdot e^{-k \cdot 5} \Rightarrow -120 = -250 \cdot e^{-k \cdot 5} \Rightarrow \ln 0,48 = -5 \cdot k \Rightarrow k \doteq 0,147$$

$$Q(t) = 600 - 250 \cdot e^{-0,147t}$$

Po vypočítaní neznámych koeficientov A, k, znázorníme graf funkcie $h: Q(t) = 600 - 250 \cdot e^{-0,147t}$, pričom $D(h) = \langle 0, \infty)$ a $a: Q(t) = 600$ je asymptota so smernicou funkcie h. Funkciu g dostaneme ak posunieme funkciu h v smere vektora $\vec{u} = \overrightarrow{BA}$, kde $B[0,350]; A[0,0]$. Predpis funkcie g vidieť na grafickej interpretácii riešenia (obr.1). Výkonnosť po 8 mesiacoch nám udáva súradnica bodu C, ktorý je prienikom priamky $c: t = 8$ a grafu funkcie g.

Grafická interpretácia riešenia:



Obr.1

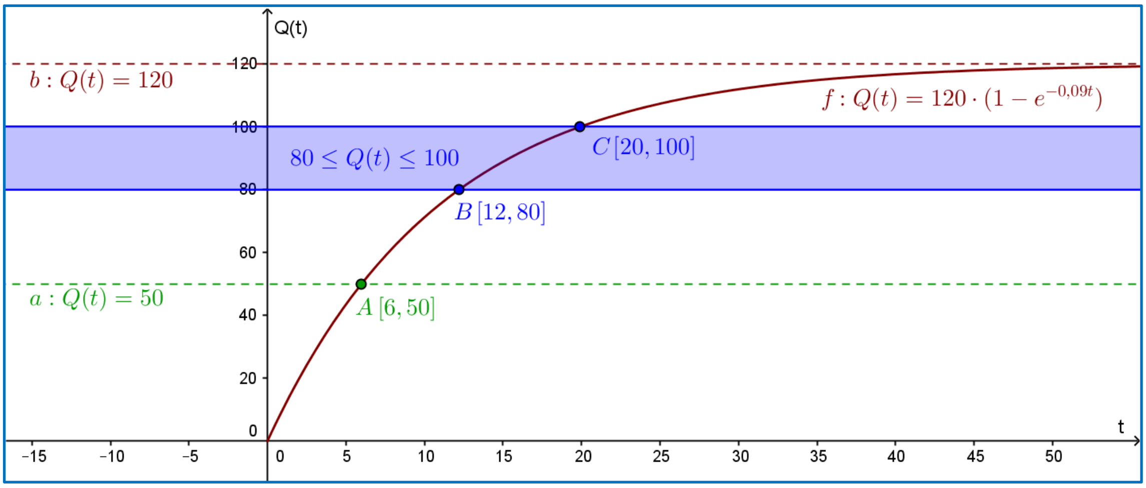
Záver: Krivka učenia sa pre výkonnosť zamestnancov vo výrobnej firme má tvar $Q(t) = 600 - 250 \cdot e^{-0{,}147t}$. Ak bude výkonnosť nového pracovníka bez praxe nulová, bude mať krivka učenia sa nasledovný tvar $Q(t) = 250\left(1 - e^{-0{,}147t}\right)$. Výkonnosť nového pracovníka po 8 mesiacoch praxe bude potom 173 (obr.1).

Príklad2

Priemerný zamestnanec danej firmy je schopný po t dňoch školenia vyrobiť 50 výrobkov za jeho pracovnú dobu. Pomocou softvéru GeoGebra nájdite riešenia na nasledujúce otázky:

- Koľko dní sa musel zamestnanec školiť, aby dosiahol takúto výkonnosť, ak krivka učenia sa má tvar $Q(t) = 120\left(1 - e^{-0.08t}\right)$?
- Koľko dní sa musí zamestnanec školiť, aby vyrobil 80 až 100 výrobkov za jeho pracovnú dobu?

Grafické znázornenie riešenia:



Obr.2

Riešenie sme získali podobne ako v príklade1. Znázornili sme graf funkcie $f : Q(t) = 120\left(1 - e^{-0.08t}\right)$ s dôrazom na jej ekonomicky reálnu oblasť definície a asymptotu so smernicou. Súradnice bodu A nám poskytli odpoveď na prvú otázku. Pri hľadaní riešenia na druhú otázku, sme využili schopnosť softvéru GeoGebra graficky riešiť nerovnicu. Súradnice bodov B, C nám poskytli hľadanú odpoveď.

Záver: Priemerný zamestnanec danej firmy sa musí školiť 6 dní, aby bol schopný vyrobiť 50 výrobkov za jeho pracovnú dobu. Aby zamestnanec vyrobil 80 až 100 výrobkov za jeho pracovnú dobu, musí sa školiť 12 až 20 dní (obr.2).

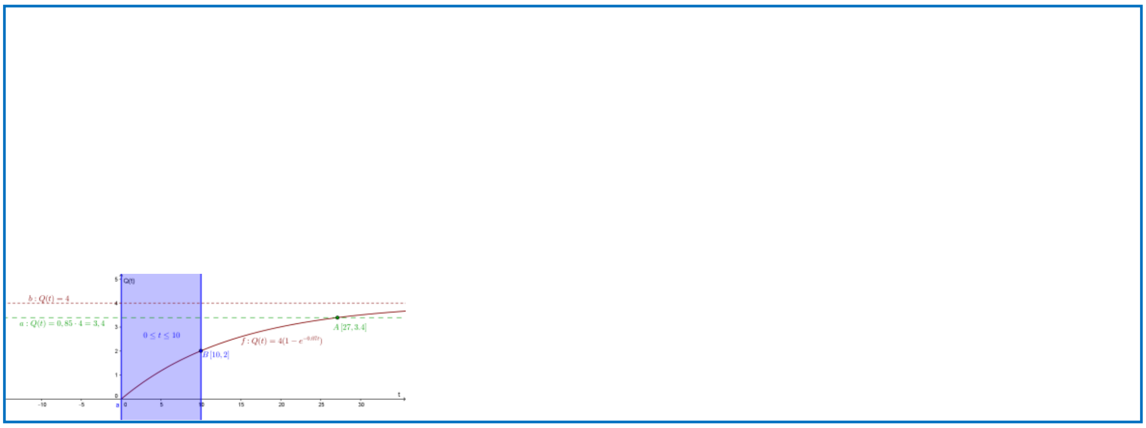
Príklad3

Spoločnosť, ktorá sa zaoberá výrobou priemyselných hnojív, predstavovala svoj nový produkt prostredníctvom reklamy na billboardoch na území, kde žijú 4 milióny ľudí. Po vykonaní prieskumu, táto spoločnosť zistila, že až 85% ľudí vedelo o novom produkte vďaka reklame. Funkcia vyjadrujúca vzťah medzi počtom ľudí v miliónoch, ktorí produkt poznali $Q(t)$ a počtom dní reklamovania produktu t mala tvar: $Q(t) = 4\left(1 - e^{-0.07t}\right)$.

- Ako dlho musela reklama prebiehať, aby 85% ľudí vedelo o produkte?

- Koľko ľudí toho istého územia bude vedieť o ďalšom reklamovanom produkte, ak firma má finančné prostriedky maximálne na 10 dní reklamovania? Predpokladá sa, že vplyv doby reklamovania na uvedenie nového produktu do pozorností ľudí, sa bude riadiť tou istou funkciou. Úlohu riešte graficky.

Grafická interpretácia riešenia:



Obr.3

Riešenie sme získali podobne ako v príklade1 a príklade2. Znázornili sme graf funkcie $f: Q(t) = 4\left(1 - e^{-0.07t}\right)$ s dôrazom na jej ekonomicky reálnu oblasť definície a asymptotu so smernicou. Súradnice bodu $A \in a \cap f$, $a: Q(t) = 0{,}85 \cdot 4 = 3{,}4$, nám poskytli odpoveď na prvú otázku. Pri hľadaní riešenia na druhú otázku, sme využili schopnosť softvéru GeoGebra graficky riešiť nerovnicu. Súradnice bodu B nám poskytli hľadanú odpoveď.

Záver: Aby 85% obyvateľov vybraného regiónu vedelo o reklamovanom produkte, reklama na billboardoch musela prebiehať 27 dní. Ak bude firma reklamovať ďalší produkt na tom istom území 10 dní, spozná ho 50% obyvateľov, teda 2 milióny ľudí (obr.3).

Záver

Interdisciplinárny charakter úloh zvýraznil bezprostrednú väzbu matematiky a ekonómie. Pomocou edukačného softvéru GeoGebra sme úspešne vytvorili obrazovo-názornú reprezentáciu skúmaných problémov a sformulovali hľadané závery. Pomocou grafickej interpretácie riešenia úloh sme dosiahli úzke spojenie medzi aspektom znázornenia objektov a aspektom reprezentácie a opis daného ekonomického javu. Študenti Slovenskej poľnohospodárskej univerzity v Nitre riešili podobné problémy v rámci svojich bakalárskych prác.

Literatúra

[1] BARNET, A.R., ZIEGLER, R.M. and BYLEEN, E.K. *College Algebra with Trigonometry*. The McGraw-Hill Companies, New York. 2008. ISBN 978-0-07-331234-4.

[2] GRINČOVÁ, A. *Matematika II a jej využitie v ekonómii*. 1.vydanie, Technická univerzita v Košiciach, 136s., 2012. ISBN 978-80-553-0851-7.

[3] MOLNÁROVÁ, M. *Matematika I a jej využitie v ekonómii*. 1.vydanie, Technická univerzita v Košiciach, 172s., 2012. ISBN 978-80-553-1168-5.

[4] ORSZÁGHOVÁ, D. *Uplatnenie nástrojov LMS moodle v samostatnom štúdiu matematických predmetov v kontexte študijných výsledkov.* In: Trendy ve vzdělávání, Olomouc, Palacky University, 8 (1), 309-314, 2015 (Online). Available: http://tvv-journal.upol.cz/pdfs/tvv/2015/01/49.pdf. [Accessed on: July 4, 2016].

[5] PAVLOVIČOVÁ, G., RUMANOVÁ, L. *Rôzne prístupy k tvorbe geometrických úloh.* In: Acta mathematica 15, Nitra, Edícia Prírodovedec č. 515 , FPV UKF, 115-120, 2012. ISBN 978-80-558-0135-3

[6] ŠVECOVÁ, V. and RUMANOVÁ, L. *Supporting mathematical creativity in realistic surroundings.* In: B.Maj-Tatsis, K. (Ed.), Generalization in mathematics at all educational levels, pp.248-256, Rzeszów: Wydawnictwo Uniwereytetu Rzeszowskiego, 248-256, 2012. ISBN 978-83-7338-780-5.

[7] ŠVECOVÁ, V., RUMANOVÁ, L. and PAVLOVIČOVÁ, G. *Support of Pupil's Creative Thinking in Mathematical Education.* In: Procedia - Social and Behavioral Sciences, VOL. 116, 1715 – 1719. 2014. ISSN 1877-0428 (Online). Available: http://www.sciencedirect.com/science/journal/18770428/116. [Accessed on: July 1, 2016].

[8] VELICHOVÁ, D. *Úloha PAS pri budovaní kognitívnych spojení v matematike.* In: Zborník vedeckých prác Nové trendy v matematickom vzdelávaní 2010, SPU Nitra, 163-168, 2010. ISBN 978-80-552-0413-0.

Lectured by: PaedDr. Júlia Záhorská, PhD.

Contact address:

Janka Drábeková, RNDr. PhD.,
Department of Mathematics, Faculty of Economics and Management,
Slovak University of Agriculture in Nitra, Tr. A. Hlinku 2, 949 11 Nitra, Slovak Republic,
phone: +421 37 641 4633, e-mail: janka.drabekova@uniag.sk